MA2115 Matemáticas IV (semi-presencial)
Práctica 2

Boris Iskra

enero – marzo 2010

1 Series numéricas.

1. **Series numéricas.**

Ejemplo 1

Diga para cuales valores de $a > 0$, la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a^n}$ *converge o diverge.*

Veamos el término general: $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+a^n} = \begin{cases} 0 & \text{si } a > 1, \\ 1/2 & \text{si } a = 1, \\ 1 & \text{si } a < 1. \end{cases}$

Diverge si $a \leq 1$. Si $a > 1$ comparamos con $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^n}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{a^n}}{\frac{1}{1+a^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+a^n}{a^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a^n} + 1 = 1$$

Como la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^n}$ converge ($a > 1$).

La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a^n}$ también converge. $\square$

Ejemplo 2

¿Para cuales valores de $a > 0$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^a}{n!}$ converge?

Usemos el criterio del cociente:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^a}{(n+1)!}}{\frac{n^a}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^a}{n^a} \frac{n!}{(n+1)!}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^a \frac{1}{n+1} = 1 \cdot 0 = 0 < 1.$$

Por lo cual la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^a}{n!}$ converge para todo $a > 0$.

Ejemplo 3

Diga si la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$ *converge o diverge.*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\dfrac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\dfrac{2^n n!}{n^n}} = \frac{2 \cdot 2^n}{2^n} \frac{(n+1)n!}{n!} \frac{n^n}{(n+1)(n+1)^n}$$

$$= \frac{2}{\dfrac{(n+1)^n}{n^n}} = \frac{2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

Entonces $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2}{e} < 1.$

La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$ converge. □

Ejemplo 4

Diga si la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(5n+1)(5n+2)}$ *converge o diverge.*

Comparamos con $b_n = \dfrac{1}{n^2}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{1}{(5n+1)(5n+2)}}{\dfrac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(5n+1)(5n+2)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(5+\frac{1}{n})(5+\frac{2}{n})} = \frac{1}{25}$$

Como la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge.

La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(5n+1)(5n+2)}$ también converge. $\square$

Ejemplo 5

Diga si la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + sen^2(nx)}{n^3}$ *converge o diverge.* $(x \in \mathbb{R})$

Usamos el criterio de comparación

$$0 \leq \frac{1+\text{sen}^2(nx)}{n^3} \leq \frac{2}{n^3}$$

y como la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^3}$$

converge, entonces la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\text{sen}^2(nx)}{n^3}$$

también converge. $\square$

Ejemplo 6

Diga si la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$ *converge o diverge.*

Analicemos el término general

$$a_n=\sqrt{n^2+1}-n=\frac{\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)\left(\sqrt{n^2+1}+n\right)}{\sqrt{n^2+1}+n}=\frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}$$

Comparamos con $b_n=\dfrac{1}{n}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1}=\frac{1}{2}$$

y como la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ diverge, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$ también diverge. $\square$

Ejemplo 7

Diga si la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8n^2-7}{e^n(n+1)^2}$ *converge o diverge.*

$$\text{Comparamos con } b_n = \frac{n^2}{e^n n^2} = \frac{1}{e^n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{8n^2-7}{e^n(n+1)^2}}{\frac{1}{e^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^n(8n^2-7)}{e^n(n+1)^2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{8n^2-7}{(n+1)^2} = 8$$

Como la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^n}$ converge.

La serie converge $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8n^2-7}{e^n(n+1)^2}$ también converge. □

Ejemplo 8

Diga si la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5n)! + 7^{n+1}}{(5n+1)!}$ *converge o diverge.*

$$\text{Comparamos con } b_n = \frac{(5n)!}{(5n+1)!} = \frac{1}{5n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left((5n)! + 7^{n+1}\right)}{(5n+1)!} \frac{5n+1}{1} = \lim_{n\to\infty} \frac{(5n)! + 7^{n+1}}{(5n)!}$$

$$= \lim_{n\to\infty} 1 + \frac{7^{n+1}}{(5n)!} = 1$$

Como la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5n+1}$ diverge.

La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5n)! + 7^{n+1}}{(5n+1)!}$ también diverge. $\square$

Ejemplo 9

Diga si la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5n)! + 7^{n+1}}{(5n+2)!}$ *converge o diverge.*

Comparamos con $b_n = \dfrac{(5n)!}{(5n+2)!} = \dfrac{1}{(5n+1)(5n+2)}$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\left((5n)! + 7^{n+1}\right)}{(5n+2)!} \frac{(5n+1)(5n+2)}{1} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(5n)! + 7^{n+1}}{(5n)!} = \lim_{n\to\infty} 1 + \frac{7^{n+1}}{(5n)!} = 1
\end{aligned}$$

Como la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(5n+1)(5n+2)}$ converge. (Ver ejemplo 1)

La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5n)! + 7^{n+1}}{(5n+2)!}$ también converge. $\square$

Ejemplo 10

$$\textit{Diga si la serie } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+1}{2n+5}\right)^{\frac{n}{2}} \textit{ converge o diverge.}$$

Usamos el criterio de la raíz

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\left(\frac{3n+1}{2n+5}\right)^{\frac{n}{2}}} = \sqrt{\left(\frac{3n+1}{2n+5}\right)}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \sqrt{\frac{3}{2}} > 1$$

La serie diverge. $\square$

Ejemplo 11

Diga si la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^n-\frac{n+1}{n}\right]^{-n}$ *converge o diverge.*

Usamos el criterio de la raíz

$$\sqrt[n]{a_n}=\sqrt[n]{\left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^n-\frac{n+1}{n}\right]^{-n}}=\left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^n-\frac{n+1}{n}\right]^{-1}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=(e-1)^{-1}<1$$

La serie converge. □

Use las estimaciones en la demostración del criterio de la integral (clase 03, Teorema 5) para demostrar:

Ejercicio

Si $f(x)$ es una función continua decreciente y $a_n = f(n)$ entonces

$$\int_1^\infty f(x)\,dx \leq \sum_{n=1}^\infty a_n \leq a_1 + \int_1^\infty f(x)\,dx.$$

Ejemplo 12

Dé un estimado para el valor de la serie: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+17}$

Consideramos la función $f(x) = \dfrac{1}{x^2+17}$ y calculamos la integral

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2+17}\,dx = \lim_{a\to\infty} \frac{1}{\sqrt{17}} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{17}}\right)\Bigg|_1^a$$

$$= \frac{\pi}{2\sqrt{17}} + \frac{1}{\sqrt{17}} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right) \approx 0.43868$$

Luego,

$$0.43868 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+17} \leq \frac{1}{18} + 0.43868$$

$$0.43868 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+17} \leq 0.49424 \quad \square$$

Ejemplo 13

Dé un estimado para el valor de la serie: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n^{\frac{5}{2}}}$

Consideramos la función $f(x) = \dfrac{x+2}{x^{\frac{5}{2}}}$ y calculamos la integral

$$\int_1^{\infty} \frac{x+2}{x^{\frac{5}{2}}}\,dx = \int_1^{\infty} \left(\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} + \frac{2}{x^{\frac{5}{2}}}\right) dx$$

$$= \lim_{a\to\infty} \frac{-2}{x^{\frac{1}{2}}} + \frac{-4}{3x^{\frac{3}{2}}}\Bigg|_1^a = 2 + \frac{4}{3} = \frac{10}{3}$$

Luego,

$$\frac{10}{3} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n^{\frac{5}{2}}} \leq 3 + \frac{10}{3}$$

$$3.333 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n^{\frac{5}{2}}} \leq 6.334$$

Ejemplo 14

Dé un estimado para el valor de la serie: $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\left(\ln(n)\right)^3}$

Consideramos la función $f(x) = \dfrac{1}{x\left(\ln(x)\right)^3}$

y calculamos la integral

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x\left(\ln(x)\right)^3}\,dx = \lim_{a\to\infty} \left.\frac{-1}{2\left(\ln(x)\right)^2}\right|_2^a = \frac{1}{2\left(\ln(2)\right)^2}$$

Luego,

$$\frac{1}{2\left(\ln(2)\right)^2} \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\left(\ln(n)\right)^3} \leq \frac{1}{2\left(\ln(2)\right)^3} + \frac{1}{2\left(\ln(2)\right)^2}$$

$$1.04068 \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\left(\ln(n)\right)^3} \leq 2.54207$$

FIN